# Über das Rieszsche Eindeutigkeitskriterium des Momentenproblems

Von G. FREUD in Budapest

Es handelt sich um den folgenden, von M. RIESZ[1]) herrührenden Satz:

*Unter der Bedingung*

$$\liminf_{n\to\infty} \left( \sqrt[2n]{\mu_{2n}}/2n \right) < \infty \tag{1}$$

*hat das Momentenproblem*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \, d\alpha(x) = \mu_n \qquad (n = 0, 1, \ldots)\,^{2)} \tag{2}$$

*höchstens eine einzige, nicht abnehmende Lösungsfunktion* $\alpha(x)$ *mit den Normierungseigenschaften*

$$\alpha(-\infty) = 0, \quad \alpha(x) = \frac{\alpha(x+0)+\alpha(x-0)}{2}. \tag{3}$$

Wir wollen hierfür einen neuen Beweis angeben.

Infolge (1) gibt es eine gegen $\infty$ strebende Folge von geraden Zahlen $N_\nu$ und eine positive Zahl $R$ mit

$$\mu_{N_\nu} < R^{N_\nu} N_\nu^{N_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Wegen der Stirlingschen Formel

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

gilt andererseits

$$n! > n^n e^{-2n} \quad \text{für} \quad n \geqq n_0. \tag{5}$$

Durch Unterdrücken endlich vieler Glieder der Folge $\{N_\nu\}$ (falls nötig) können wir annehmen, daß $N_\nu \geqq n_0$ für jedes $\nu$.

---

[1]) M. RIESZ, Sur le problème des moments, Troisième Note, *Arkiv för Mat. Astr. och Fysik*, **17**, No. 16 (1923); vgl. S. 48.

Der Satz von M. RIESZ ist in einem allgemeineren Satze von TH. CARLEMAN enthalten, angekündigt in *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **174** (1922), 1680—1682, und bewiesen im Buch: TH. CARLEMAN, *Les fonctions quasi-analytiques* (Paris, 1926), S. 81.

[2]) $\mu_0, \mu_1, \ldots$ ist eine vorgegebene Folge von reellen Zahlen und man setzt voraus, daß die Integrale absolut konvergent sind. Wegen (2) ist notwendigerweise $\mu_{2n} \geqq 0$ für $n = 0, 1, \ldots$.

Auf Grund der Taylorschen Formel mit Lagrangeschem Restglied gilt für jede reelle Zahl $x$ und für jede natürliche Zahl $N$:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(ix)^n}{n!} + \frac{x^N}{N!} [\cos^{(N)} \theta_1 x + \sin^{(N)} \theta_2 x] \qquad (0 < \theta_1, \theta_2 < 1),$$

also ist

$$\left| e^{ix} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{i^n x^n}{n!} \right| \leqq \sqrt{2} \frac{|x|^N}{N!}.$$

Sind $x$, $t$ und $t_0$ reell, so folgt hieraus

$$\left| e^{i(t-t_0)x} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{[i(t-t_0)x]^n}{n!} \right| \leqq \sqrt{2} \frac{|(t-t_0)x|^N}{N!}$$

und — durch Multiplizieren mit $e^{it_0 x}$ —

$$\left| e^{itx} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{i^n (t-t_0)^n x^n}{n!} e^{it_0 x} \right| \leqq \sqrt{2} \frac{|t-t_0|^N |x|^N}{N!}. \tag{7}$$

Wir nehmen nun an, $\alpha(x)$ sei eine nichtabnehmende, den Nebenbedingungen (3) genügende Lösung des Momentenproblems (2) und wir setzen

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, d\alpha(x) \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Da die Integrale (2) absolut konvergent vorausgesetzt sind, ist $\varphi(t)$ unendlich oft differenzierbar und man hat

$$\varphi^{(n)}(t) = i^n \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{itx}\, d\alpha(x) \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{8}$$

Auf Grund von (8) und der Ungleichung (7) bekommt man durch Integration

$$\left| \varphi^{(n)}(t) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(t-t_0)^n}{n!} \varphi^{(n)}(t_0) \right| \leqq \sqrt{2} \frac{|t-t_0|^N}{N!} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^N\, d\alpha(x). \tag{9}$$

Für gerade $N$ ist hier die rechte Seite gleich $\sqrt{2}|t-t_0|^N \mu_N / N!$. Wegen (4) und (5) ist also für $N = N_\nu$ die rechte Seite kleiner als

$$\sqrt{2}(t-t_0)^N \frac{R^N N^N}{N^N e^{-2N}} = \sqrt{2} \left( \frac{t-t_0}{r} \right)^N \tag{10}$$

mit $r = (e^2 R)^{-1}$.

Wenn $N = N_\nu$, $\nu \to \infty$ und $|t-t_0| < r$, so strebt die Größe (10) gegen 0. Also gilt

$$\varphi(t) = \lim_{\nu \to \infty} \sum_{n=0}^{N_\nu - 1} \frac{(t-t_0)^n}{n!} \varphi^{(n)}(t_0) \quad \text{für} \quad |t-t_0| < r. \tag{11}$$

Wegen (8) hat man insbesondere $\varphi^{(n)}(0) = i^n \mu_n$, also nimmt (11) für $t_0 = 0$ die folgende Gestalt an:

$$\varphi(t) = \lim_{\nu \to \infty} \sum_{n=0}^{N'_\nu - 1} \frac{(it)^n}{n!} \mu_n.$$

Diese Formel zeigt, daß die Funktion $\varphi(t)$ auf dem Intervall $(-r, +r)$ durch die Momente $\mu_n$ eindendig bestimmt wird. Wenn aber die Funktion $\varphi(t)$ auf irgendeinem Intervall $(a, b)$ bestimmt ist, so folgt aus (11), daß $\varphi(t)$ auch im Intervall $(a-r, b+r)$ bestimmt ist; man lasse nun $t_0$ das Intervall $(a, b)$ durchlaufen. Man schließt, daß $\varphi(t)$ durch die Momente $\mu_n$ auf der ganzen Geraden $(-\infty, +\infty)$ eindeutig bestimmt ist.

Durch die bekannte Umkehrformel

$$\alpha(x) - \alpha(y) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{+T} \varphi(t) \frac{e^{-ity} - e^{-itx}}{it} dt$$

(wobei $x, y$ beliebige Stetigkeitsstellen von $\alpha(x)$ sind) und wegen den Normierungsbedingungen (3) wird $\alpha(x)$ durch $\varphi(t)$, also durch die Momente $\mu_n$ eindeutig bestimmt.

Damit ist der Beweis fertig.

Herrn Prof. BÉLA SZ.-NAGY bin ich für wertvolle Ratschläge zu Dank verpflichtet.

*(Eingegangen am 15. Juni 1965)*